$A_n(n \geq 5)$ 是单群的证明

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 30 日

这份笔记的目的是记录“当正整数 $n \geq 5$ 时, 交错群 A_n 是单群.”这一事实的证明.

Theorem 1. 给定正整数 $n \geq 1$, 则 A_n 是单群的充要条件是 $n \neq 4$.

Proof. 当 $n = 1, 2$ 时 A_1 是平凡群, 为单群. 当 $n = 3$ 时, A_3 是 3 阶群, 作为素数阶循环群是单群. 当 $n = 4$ 时, 易验证 $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 是 A_4 的正规子群, 所以 A_4 不是单群. 因此要证明原命题我们只需要证明当 $n \geq 5$ 时, A_n 是单群. 现设正整数 $n \geq 5$ 且 N 是 A 是正规子群, 满足 N 至少两个元素, 如果能证明 $N = A_n$, 那么我们就说明了 A_n 是单群. 在证明 $N = A_n$ 前, 我们先说明要证明 $N = A_n$ 只需证明 N 包含一个 3-轮换. 事实上, 如果 $(ijk) \in N$, 当 $\{1, 2\} \subseteq \{i, j, k\}$ 时, 那么存在正整数 t 使得 $(12t) \in N$, 于是对任何正整数 $s \notin \{1, 2, t\}$, 取 $r \in \{1, 2, 3, ..., n\} - \{1, 2, s, t\}$, 有 $(ts)(rs)(12t)(rs)(ts) = ((ts)(rs))(12t)((ts)(rs))^{-1} = (12s)$, 故由 $A_n = \langle (123), (124), ..., (12n)$ 立即得到 $N = A_n$. 如果 i, j, k 中恰好包含一个 1 或者 2, 以 $i = 1$ 为例, 有 $(21k) = (j2)(1j)(1jk)(1j)(j2) \in N$, 这就转化为了前面已经讨论过的情形, 故 $N = A_n$. 如果 i, j, k 中不含 $1, 2$, 那么由 $(12k) = (j2)(i1)(ijk)(i1)(j2) \in N$ 同样转化为前面讨论过的情形. 因此我们把证明 $N = A_n$ 化归为证明 N 包含一个 3-轮换. 设 $\sigma \neq (1) \in N$, 我们分下面 4 种情况讨论：

Case 1. 当 σ 的不相交轮换分解中存在长度至少为 4 的轮换因子时. 设 $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)\tau$, 这里正整数 $r \geq 4$, 置换 τ 是 σ 轮换分解式中其余和 $(a_1 a_2 \cdots a_r)$ 不相交的置换的乘积, 它和 $(a_1 a_2 \cdots a_r)$ 也不相交. 取 $\delta = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$, 则 $\sigma^{-1}\delta\sigma\delta^{-1} \in N$. 直接计算知

$$\sigma^{-1}\delta\sigma\delta^{-1} = \tau^{-1}(a_r a_{r-1} \cdots a_2 a_1)(a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2 \cdots a_r)\tau(a_1 a_2 a_3) = (a_r a_1 a_2)(a_1 a_3 a_2) = (a_1 a_3 a_r),$$

所以 $(a_1 a_3 a_r) \in N$, 从而结合前面的讨论知 $N = A_n$.

Case 2. 当 σ 的不相交轮换分解中每个轮换因子长度不超过 3 时, 且至少有两个 3-轮换因子. 设

$$\sigma = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)\tau,$$

这里 τ 是和 $(a_1 a_2 a_3), (a_4 a_5 a_6)$ 不相交的置换. 取 $\delta = (a_1 a_2 a_4) \in A_n$, 则 $\sigma^{-1}\delta\sigma\delta^{-1} \in N$. 直接计算知

$$\sigma^{-1}\delta\sigma\delta^{-1} = \tau^{-1}(a_6 a_5 a_4)(a_3 a_2 a_1)(a_1 a_2 a_4)(a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)\tau(a_1 a_2 a_4) = (a_1 a_2 a_4 a_6 a_3)$$

这说明 N 包含一个长度为 5 的轮换, 这就转化成了情形 1, 于是 $N = A_n$.

Case 3. 当 σ 的不相交轮换分解中每个轮换因子长度不超过 3 时, 且恰好有一个 3-轮换因子. 如果 σ 轮换分解中没有 2-轮换因子, 那么 σ 自身就是一个 3-轮换, 由此得到 $N = A_n$. 否则, σ 是一个 3-轮换与一些不相交 2-轮换的乘积, 设 $\sigma = (a_1a_2a_3)\tau$, 这里 τ 是一些与 $(a_1a_2a_3)$ 不相交的对换的乘积, 那么 $\sigma^2 = (a_1a_3a_2) \in N$, 所以 $N = A_n$.

Case 4. 当 σ 是一些不相交对换的乘积时. 因为 $\sigma \neq (1) \in A_n$, 所以 σ 是偶数个不相交对换乘积, 设为 $\sigma = (a_1a_2)(a_3a_4)\tau, \tau$ 为其余不相交对换的乘积. 取 $\delta = (a_1a_2a_3) \in A_n$, 那么 $\sigma^{-1}\delta\sigma\delta^{-1} = (a_1a_3)(a_2a_4) \in N$. 记

$$\gamma = (a_1a_3)(a_2a_4), \xi = (a_1a_3b) \in A_n, b \in \{1, 2, ..., n\} - \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

那么 $\gamma^{-1}\xi\gamma\xi^{-1} = (a_1a_3b) \in N$, 所以 $N = A_n$. $\square$